Informática Teórica

- Créditos: 4;
- Pré-requisito: IP;
- Carga horária total h/a:80;
- Carga horária total h/r:60.

Ementa

- Programas e máquinas.
- Autômatos;
- Funções recursivas.
- Máquina de Turing.
- Análise de algoritmos.
- Complexidade computacional.
- Computabilidade.

Referências Básicas

- SIPSER, Michael. Introdução à Teoria da Computação. São Paulo, SP. 2o Ed. Thomson Pioneira. 2007.
- HOPCROFT, John E. Introduction to automata theory, languages, and computation. 2. ed. Boston: Addison-Wesley, 2001.
- SINGH, Arindama; GRIES, David; SCHNEIDER, Fred B. Elements of computation theory. London: Springer, 2009.

Aula 02

Automatos Finitos

Introdução

- Os autômatos são formalismos particularmente adequados para o reconhecimento de linguagens
- Dentre os diversos tipos de autômatos existentes, neste curso abordaremos os mais conhecidos
  - Autômatos Finitos Determinísticos, ou AFDs
  - Autômatos Finitos Não Determinísticos, ou AFNs
  - Autômatos Finitos Não Determinísticos Estendidos, ou AFNEs
  - Autômatos Finitos Não Determinísticos com Transições λ, ou AFNλs
  - Autômatos de Pilha Determinísticos, ou APDs;
  - Autômatos de Pilha Não Determinísticos, ou APNs;
  - Máquinas de Turing, ou MTs

Tentaremos ver todos, mas a nossa cara horária talvez não permita.

Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- “Máquinas” virtuais com poder de processamento extremamente limitado
- Um AFD é composto por:
  - Um conjunto finito e não vazio de estados
  - Sempre se encontra em um (e somente um) estado a cada instante
  - Um dos estados é o estado inicial e estabelece o estado da máquina no início do seu funcionamento
  - O AFD é alimentado com uma palavra de entrada, composta por uma sequência arbitrária de símbolos do alfabeto

Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- A passagem de um estado para outro é determinada por regras de transição
- A cada passo, o primeiro símbolo da palavra é consumido e a máquina adota o novo estado determinado pela regra de transição
- A máquina para quando todos os símbolos da palavra de entrada são consumidos
- Alguns estados podem ser finais
  - Após consumir toda a palavra de entrada, se a máquina para em um estado final, então diz--se que a máquina reconhece (ou aceita) a palavra de entrada

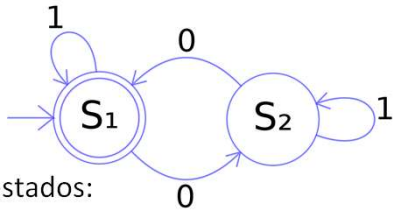
Definição Formal

- Um Autômato Finito Determinístico A é uma 5-tuple (ou quíntupla), (Q, Σ, δ, q0, F) consistindo de:
  - um conjunto finito de símbolos de entrada chamado Alfabeto (Σ)
  - um conjunto finito de estados (Q)
  - uma função de transição ($\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$)
  - um estado inicial ($q0 \in Q$) e
  - um conjunto de estados de aceitação ($F \subseteq Q$)

Em outras palavras, a primeira condição afirma que a máquina se inicia no estado inicial q_0. A segunda condição diz que, dado cada símbolo da entrada w, a máquina transita de estado em estado de acordo com a função de transição δ. A terceira e última condição diz que a máquina aceita w se somente se o último símbolo da entrada leva o autômato a parar em um estado f tal que $f \in F$. Caso contrário, diz-se que a máquina rejeita a entrada. O conjunto de cadeias que M aceita é chamado Linguagem reconhecida por M e é simbolicamente representado por L(M).

Exemplo

- O exemplo a seguir representa um AFD M, com um alfabeto binário, que requer que sua entrada contenha um número par de 0s.
  - M = (Q, Σ, δ, q0, F) onde
  - Q = {S1, S2},
  - Σ = {0, 1},
  - q0 = S1,
  - F = {S1}, e
  - δ é definido da pela seguinte Tabela de transição de estados:



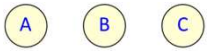
	0	1
S1	S2	S1
S2	S1	S2

O estado S1 indica que houve um número par de ocorrências do símbolo 0 até então na entrada, enquanto que S2 significa que esse valor foi impar. Um 1 na entrada não altera o estado atual do autômato. Quando a entrada é completamente lida, o estado atual vai indicar se a cadeia de entrada possui um número par de 0s ou não. Caso a cadeia possua de fato uma quantidade par, M vai encerrar-se no estado S1, um estado de aceitação, tal que a entrada vai ser aceita. Caso contrário, se o autômato encontrar-se no estado S2, a máquina rejeita a cadeia.

A linguagem reconhecida por M é a Linguagem regular dada pela Expressão regular 1*(0 (1*) 0 (1*))*, tal que "*" é uma Kleene star, e.g., 1* indica que há "zero ou mais" ocorrências de 1s nesse trecho da expressão.

Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Um estado é representado por uma circunferência contendo um rótulo (seu nome)



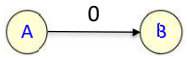
- O estado inicial é identificado por uma seta

- Cada estado final é identificado por borda dupla

- Um estado pode ser ao mesmo tempo inicial e final

Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

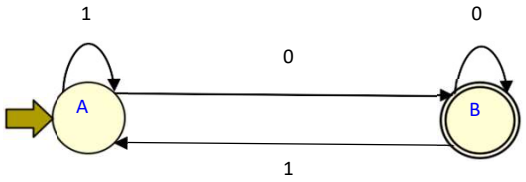
- Uma transição é representada por uma seta



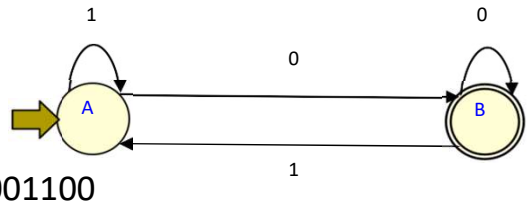
- Diz-se que esta transição consome o símbolo 0 e leva a máquina do estado A para o estado B

Exemplo

- Os estados são A e B
- O estado Inicial é A
- O estado final é B
- Há quatro transições
  1. De A, consome 0 e vai para B
  2. De A, consome 1 e vai para A
  3. De B, consome 0 e vai para B
  4. De B, consome 1 e vai para A



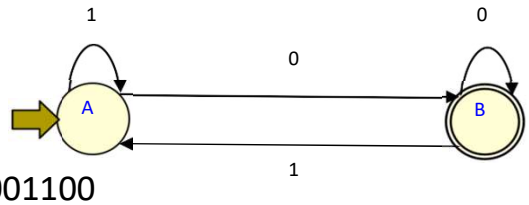
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100

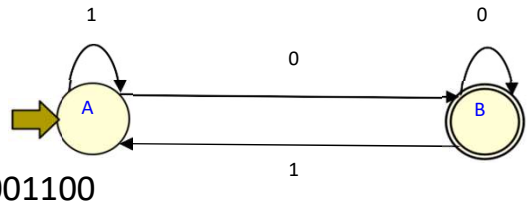
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100
0	B	01100

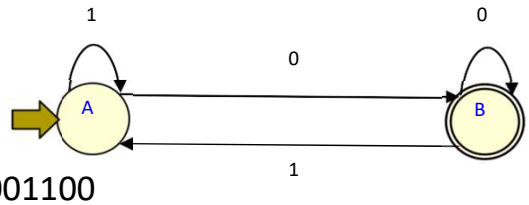
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100
0	B	01100
0	B	1100

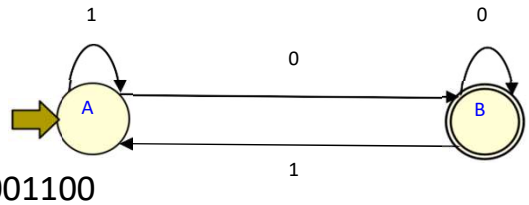
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100
0	B	01100
0	B	1100
1	A	100

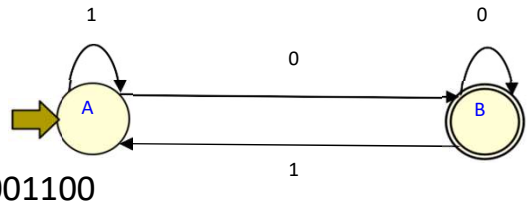
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100
0	B	01100
0	B	1100
1	A	100
1	A	00

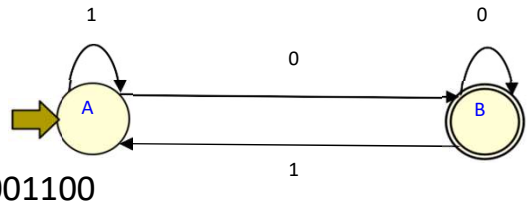
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100
0	B	01100
0	B	1100
1	A	100
1	A	00
0	B	0

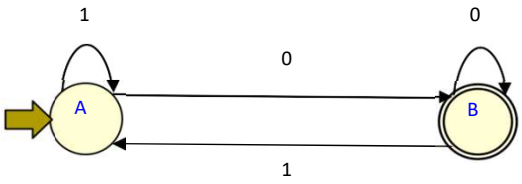
Exemplo



- Exemplo para consumo da palavra 001100

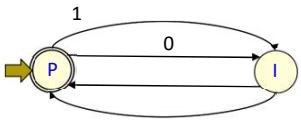
Após consumir	chega-se ao estado	e resta consumir
λ	A	001100
0	B	01100
0	B	1100
1	A	100
1	A	00
0	B	0
0	B	λ

Exemplo

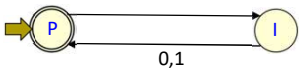


- Observações sobre a máquina
  - Somente chega no estado B após consumir um símbolo 0
  - Retorna incondicionalmente ao estado A quando consome um símbolo 1
- Qual linguagem é reconhecida por este AFD?
  - $\{0,1\}^*\{0\}$

Exemplo



- Este AFD intercala entre os estados P e I, independente do símbolo consumido
- A única maneira de chegar a um estado final (no caso, P) é consumir um número par de símbolos
  - L = ({0,1}2)*
- Uma forma mais compacta, consolidando transições



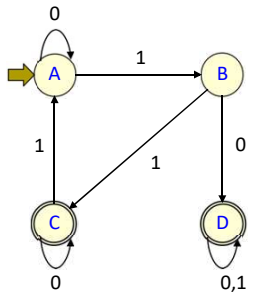
Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Em um AFD, é obrigatório que
  - Todos os estados tenham regras de transição partindo deles para cada um dos símbolos do alfabeto
  - Não haja mais de uma transição que parte do mesmo estado que consome o mesmo símbolo
- Essas restrições garantem que
  - Enquanto houver símbolos a serem consumidos, é sempre possível realizar um passo de execução
  - Um passo de execução sempre leva a máquina a um único estado

Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Considerando Σ = {0,1}
- A máquina de estados ao lado é um AFD?
- Por quê?

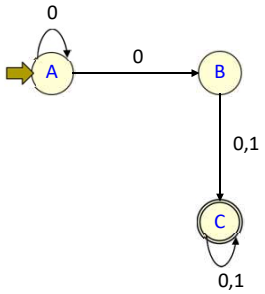
- Sim, pois há transições saindo de cada estado para cada símbolo, sem repetições



Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Considerando Σ = {0,1}
- A máquina de estados ao lado é um AFD?
- Por quê?

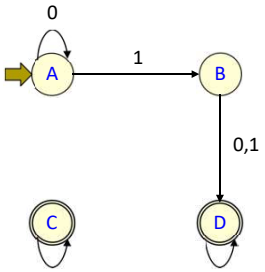
- Não, há duas transições saindo de A, consumindo o símbolo 0.



Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Considerando Σ = {0,1}
- A máquina de estados ao lado é um AFD?
- Por quê?

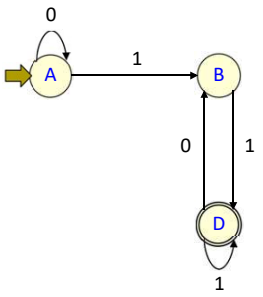
- Sim, não há obrigação de que todos os estados estejam conectados entre si



Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Considerando Σ = {0,1}
- A máquina de estados ao lado é um AFD?
- Por quê?

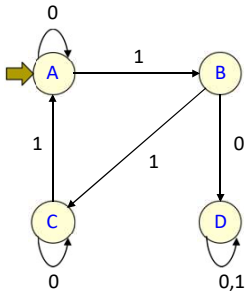
- Não, falta a transição de saída de B consumindo o símbolo 0.



Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Considerando Σ = {0,1}
- A máquina de estados ao lado é um AFD?
- Por quê?

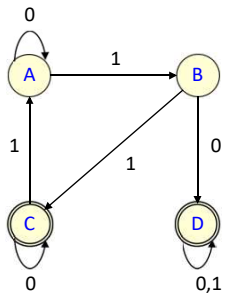
- Sim, pois não há obrigação de ter estados finais



Autômatos finitos determinísticos (AFDs)

- Considerando Σ = {0,1}
- A máquina de estados ao lado é um AFD?
- Por quê?

- Não, pois não há estado inicial

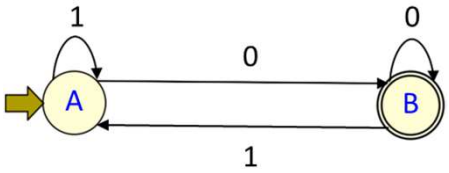


Configuração instantânea

- A configuração instantânea de uma máquina é o conjunto de informações que representa uma “fotografia” da execução dessa máquina em um determinado instante
- No caso de um AFD, a configuração instantânea engloba
  - O estado atual
  - A sequência de símbolos que falta consumir

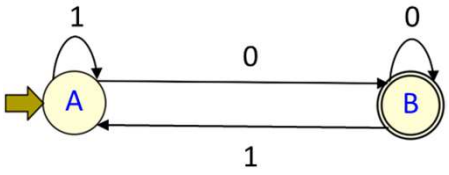
Configuração instantânea

- Voltando a exemplo inicial
  - Palavra a consumir 001100
- Configuração instantânea inicial é:
  - (A, 001100)
- Após consumir o primeiro símbolo da palavra (0)
  - (B, 01100)



Configuração instantânea

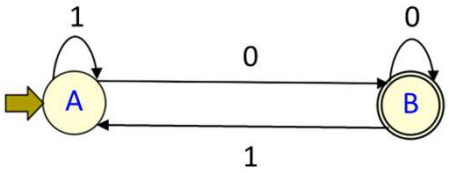
- Voltando a exemplo inicial
  - Palavra a consumir 001100
- Diz-se que
  - A configuração (A, 001100) leva à configuração (B, 01100)
- Este passo de execução é representado pelo símbolo ⊢, que significa "leva a"
  - (A, 001100) ⊢ (B,01100)



Configuração instantânea

- Voltando a exemplo inicial
  - Palavra a consumir 001100
- A sequência de execução é

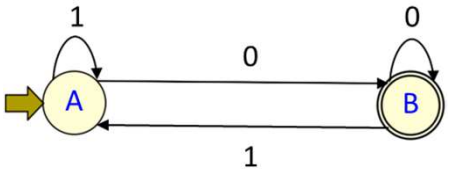
(A, 001100)⊢(B,01100)
⊢(B, 1100)
⊢(A, 100)
⊢(A, 00)
⊢(B, 0)
⊢(B, λ)



Configuração instantânea

- Voltando a exemplo inicial
  - Palavra a consumir 001100
- Ou simplesmente

  $(A, 001100) \vdash^{6} (B, \lambda)$
- que significa que (A, 001100) leva a (B, λ) em 6 passos

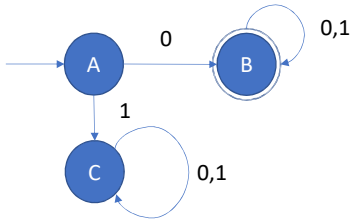


Exemplo

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras que começam com 0 baseadas em Σ={0,1}.
  - Exemplo de palavras válidas:
  - {0,00,01,000,001,011,010,...}

Solução

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras de cardinalidade 2 baseadas em Σ={0,1}.
  - Exemplo de palavras válidas:
  - {0,00,01,000,001,011,010,...}



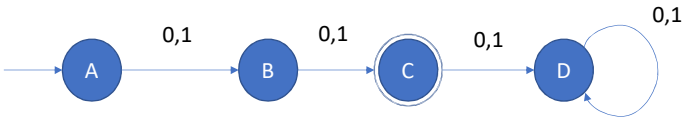
Teste com 5 cadeias baseadas em Σ

Exemplo

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras de cardinalidade 2 baseadas em Σ={0,1}.
  - Exemplo de palavras válidas:
  - {00,01,10,11}

Solução

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras que começam com 0 baseadas em Σ={0,1}.
  - Exemplo de palavras válidas:
  - {00,01,10,11}

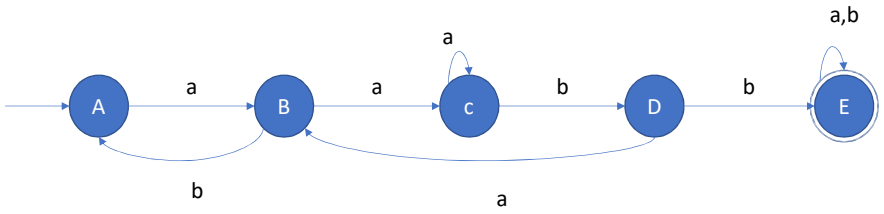


Exemplo

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras que **não** contenham a sequencia aabb baseadas em Σ={a,b}.
  - Exemplo de palavras válidas:
  - {a, b, aa, bb, ab, aaa, bbb,... }

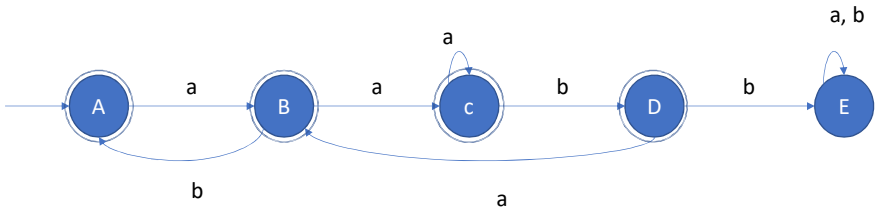
Solução

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras que contenham a sequencia aabb baseadas em Σ={a,b}.



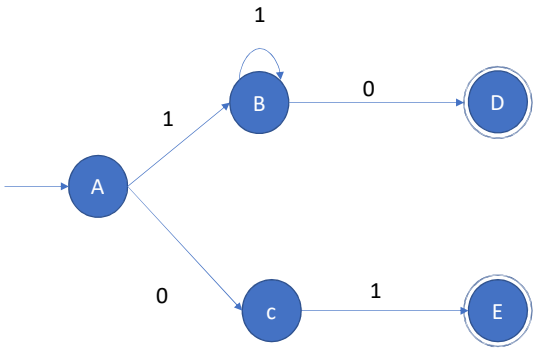
Solução

- Criar um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a seguinte linguagem – L1 conjunto de todas as palavras que **NÃO** contenham a sequencia aabb baseadas em Σ={a,b}.



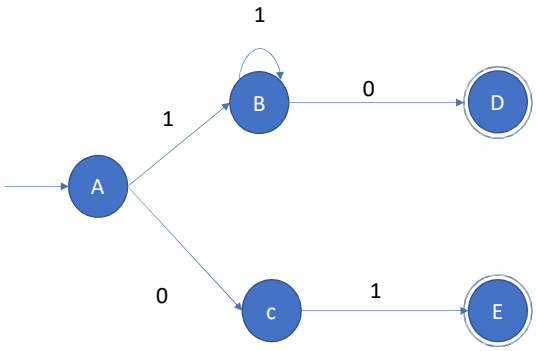
Exemplo

- Dado um AFD, o que o AFD reconhece?



Solução

- Dado um AFD, o que o AFD reconhece?



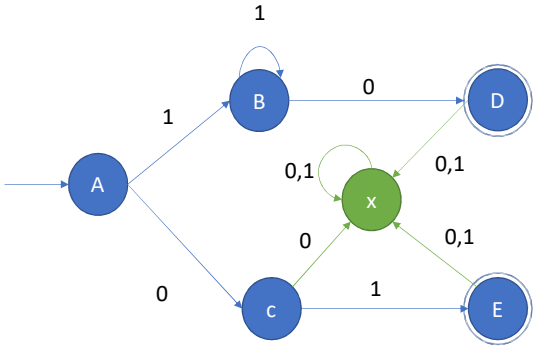
- Cadeias aceitáveis
  - 10
  - 111111110
  - 01
- Interpretação
  - L={Aceita a cadeia 01 ou pelo menos um 1 seguido de 0}

Testando a solução

- 001, 010, 011, 1101, 1100

Solução

- Dado um AFD, o que o AFD reconhece?



- Cadeias aceitáveis
  - 10
  - 111111110
  - 01
- Interpretação
  - L={Aceita a cadeia 01 ou pelo menos um 1 seguido de 0}

Testando a solução

- 001, 010, 011, 1101, 1100

Atenção a explicação do professor.

FIM

Aula 02